Chapitre 4

Sur les nombres de Betti

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 128, p. 629-630 (13 mars 1899).

Dans un mémoire intitulé *Analysis situs* et inséré au *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai énoncé un théorème d'après lequel, dans toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

M. Heegaard est revenu sur la question dans un travail très remarquable, intitulé : *Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske Fladers Sammenhäng.* Il considère le théorème comme inexact.

Ces critiques sont en partie fondées ; le théorème n'est pas vrai des nombres de Betti *tels que Betti les définit ;* c'est ce qui résulte d'un exemple cité par M. Heegaard ; c'est ce qui résultait d'ailleurs, d'un exemple que j'avais moi-même rencontré dans mon Mémoire.

Le théorème est vrai, au contraire, des nombres de Betti tels que je les définis ; j'en ai trouvé une démonstration qui est fondée sur la considération des polyèdres à n dimensions et que je développerai prochainement dans un Mémoire plus étendu.

Voici la différence des deux définitions :

Le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti diminué d'une unité est le nombre de variétés à p dimensions distinctes faisant partie de la variété donnée.

Mais il reste à définir ce qu'on doit entendre par variétés distinctes.

Pour Betti, plusieurs variétés v_p sont distinctes quand il n'existe pas dans la variété donnée de variété à $p+1$ dimensions dont la frontière complète soit formée par l'ensemble des variétés v_p. Dans la définition que j'ai adoptée, les variétés v_p ne sont dites *distinctes* que s'il n'existe pas de variété à $p + 1$ dimensions dont la frontière complète soit formée par l'ensemble des variétés v_p, répété une ou plusieurs fois.