Chapitre 1

Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 117, p. 144-145 (1893)[1].

On sait qu'Euler a démontré que, dans un polyèdre convexe, le nombre des sommets, plus celui des faces, moins celui des arêtes, est égal à 2 ; si donc on désigne par α_0, α_2 et α_1 ces trois nombres, on aura

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

Ce résultat s'étend à tous les polyèdres simplement connexes ; on sait que si l'ordre de connexion est égal à P_1, la formule doit s'écrire

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - P_1.$$

Il peut être intéressant, au point de vue de l'*Analysis Situs* et de ses applications, de voir ce que devient ce théorème pour un polyèdre situé dans l'espace à plus de trois dimensions. Considérons donc un polyèdre situé dans l'espace à $n+1$ dimensions, et soit α_0 le nombre des sommets, α_1 le nombre des arêtes, c'est-à-dire des éléments à une dimension, α_2 celui des éléments à deux dimensions, etc. ; et enfin α_n celui des éléments à n dimensions. On trouve aisément

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots \pm \alpha_n = \text{const.}$$

Mais, ce qu'il y a de remarquable, c'est que la constante du second membre dépend de l'ordre de connexion si n est pair, et qu'elle est toujours nulle si n est impair.

1. Ça serait bien d'avoir la date exacte comme pour les autres notes.

On peut s'en rendre compte de diverses manières ; par exemple si nous désignons par

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$$

les ordres de connexion du polyèdre définis par Riemann et Betti, on voit qu'on a

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + \alpha_n = 3 - P_1 + P_2 - \ldots - P_{n-1},$$

si n est pair et

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = -P_1 + P_2 - \ldots + P_{n-1},$$

si n est impair.

Comme les nombres de Betti P_q et P_{n-q} sont égaux, on voit que, dans le second cas, le second membre est nul, ainsi que je l'avais annoncé.

Ces résultats supposent que tous les éléments du polyèdre sont simplement connexes. S'il n'en était pas ainsi, on serait conduit à une formule analogue, mais plus compliquée.